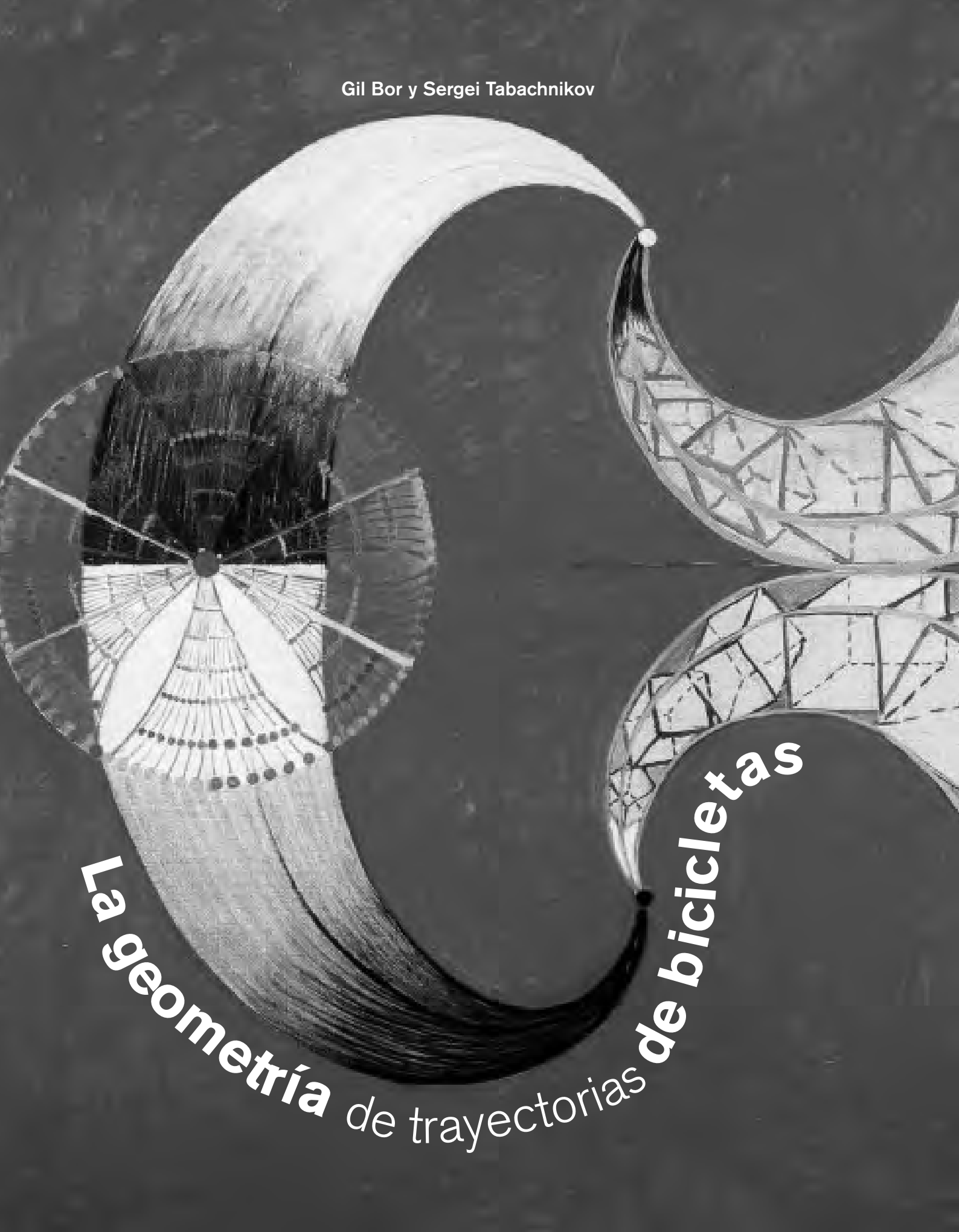
Gil Bor y Sergei Tabachnikov



La geometría de trayectorias de bicicletas

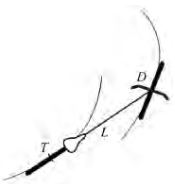
Desde su invención, a principios del siglo XIX, la bicicleta ha ejercido una constante fascinación por distintos aspectos, tanto prácticos como teóricos; uno de ellos es su desplazamiento, su trayectoria, que aquí abordamos. Veamos si en un terreno arenoso o lodoso encontráramos las marcas que dejan las ruedas delantera y trasera de una bicicleta (figura 1), ¿sabríamos en qué dirección se desplazaba la bicicleta?

(*1*)

A primera vista, tales trayectorias parecen un par de curvas aleatorias; sin embargo, no es así. ¿Cómo deducir cuál de éstas corresponde a la rueda delantera y cuál a la trasera con base únicamente en la forma de las trayectorias?, ¿cómo dilucidar en qué dirección iba la bicicleta, si de izquierda a derecha o al revés?

Para lograr este análisis utilizaremos un modelo simple para el movimiento de la bicicleta, en donde la bicicleta se representa por un segmento TD de longitud fija L, que conecta el centro de la rueda trasera T con el de la delantera D (figura 2). La única restricción que imponemos al movimiento del segmento TD es la condición de "no derrapar", es decir, en cada momento el segmento TD es tangente a la trayectoria de la rueda trasera.

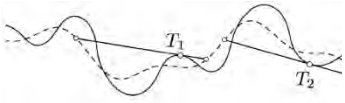
(*2*)



Retomemos ahora la figura inicial con el par de trayectorias (figura 3) y supongamos primero que una de ellas, digamos la sólida (no punteada), es la trasera; para comprobar si es cierto, trazamos una recta tangente a esta curva en algún punto T_1, marcando las intersecciones de esta recta tangente con la otra curva, la punteada; estos puntos, a la izquierda (i) y a la derecha (d) de T_1, constituyen los candidatos para ser el centro de la rueda delantera. El segmento que une T_1 a uno de estos puntos de intersección determinaría la longitud (L) de la bicicleta. Si repetimos este procedimiento en otro pun-

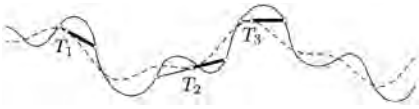
to de la curva sólida (T_2), obtenemos tamaños distintos de L sin importar en qué dirección viaja la bicicleta. Como el tamaño de la bicicleta (L) es fijo, concluimos que la curva sólida no puede ser la trayectoria de la rueda trasera.

(*3*)



En cambio (figura 4), si intentamos hacer lo mismo pero suponiendo que la otra curva (la punteada) es la trasera y que la bicicleta viajaba de izquierda hacia la derecha, obtenemos que los segmentos resultantes son de la misma longitud (L), como debe ser el tamaño de una bicicleta.

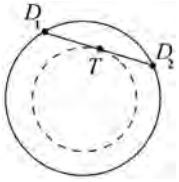
(*4*)



Trayectorias ambiguas

Comúnmente, se puede decidir en qué dirección viajaba una bicicleta; sin embargo, hay casos especiales en donde no es posible. Un ejemplo trivial es el de la trayectoria de una bicicleta que deja como marca un par de círculos concéntricos (figura 5), en donde el círculo interior es claramente la trayectoria de la rueda trasera; el problema es que no se puede decidir en qué dirección va la bicicleta, ya que ambos sentidos, siguiendo las manecillas del reloj o en contra, son consistentes bajo la condición de no derrapar.

(*5*)

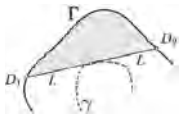


Una pregunta natural es entonces: ¿existen otros pares de trayectorias ambiguas pero no circulares? La respuesta es positiva, y aquí podemos ver tres ejemplos de tales trayectorias cerradas (figura 6).

(*6*)

Este problema está relacionado con otros muy interesantes. Mencionemos primero una caracterización de la trayectoria de la rueda delantera (Γ) de un par "ambiguo": si tomamos un segmento de longitud fija (2L), lo apoyamos en Γ en dos puntos (D_1 y D_2), y lo deslizamos a lo largo de Γ, manteniendo sus extremos sobre Γ, su punto medio se mueve en la dirección del segmento mismo (figura 7). Esto es porque el punto medio traza la curva trasera común γ a las dos bicicletas que forman el segmento D_1-D_2, y por lo tanto, según la condición de no derrapar, debe ser tangente a γ en todo momento. Resulta que esta condición es también equivalente a que el área sombreada entre el segmento y el arco de Γ delimitado por él se mantiene constante al mover el segmento a lo largo de Γ.

(*7*)

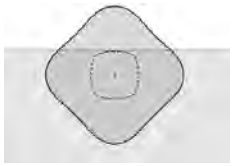


El problema de flotación de Ulam

Consideramos ahora dos problemas relacionados con el problema de las llamadas trayectorias ambiguas. En *El libro escocés*, cuyo nombre se debe al café en donde se reunía un grupo de matemáticos polacos en Lwow durante la década de los treintas del siglo pasado, hay un problema que trata de la flotación de los cuerpos, es el número 19 y se puede resumir así: ¿cuáles son los cuerpos homogéneos que flotan en equilibrio en todas las posiciones?

En dimensión tres no se conoce ningún ejemplo más que el caso trivial de una esfera con densidad relativa menor a 1 y el problema sigue abierto; en dimensión dos (un "tronco flotante"), el problema es el mismo que el de encontrar la trayectoria de la rueda delantera en un par de trayectorias ambiguas cerradas: el papel de la densidad relativa del tronco lo desempeña la longitud relativa del arco de la trayectoria delantera, sostenido por el segmento D_1-D_2 con longitud 2L (figura 8). Esta relación permite encontrar muchas soluciones no triviales al problema de flotación en dimensión dos. Sin embargo, hasta la fecha no se conocen todas estas curvas, a pesar de muchos años de investigación por matemáticos como Aurbach, Zindler, Wegner y nosotros mismos en colaboración con M. Levi y R. Perline.

(*8*)



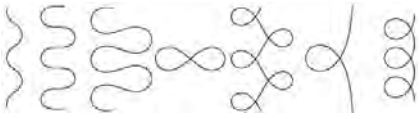
Curvas elásticas

Estudiadas desde hace siglos por matemáticos como Euler y Bernoulli para modelar las formas que toman ciertas estructuras las vigas bajo estrés, de las curvas de longitud fija (con extremos fijos o curvas cerradas), las elásticas son curvas que minimizan la curvatura cuadrada total. Las soluciones a la ecuación diferencial asociada con este problema variacional se expresan en términos de las llamadas funciones elípticas, un tema clásico de análisis matemático.

Un problema variacional relacionado es el de las curvas elásticas presurizadas que, de las curvas con longitud y área fijas, son aquellas que minimizan la curvatura cuadrada total. Otra caracterización interesante de estas curvas, que ya Euler había notado, es que la curvatura de las curvas elásticas varía linealmente con la distancia a una recta fija en el plano; por lo que la curvatura de las curvas elásticas presurizadas varía cuadráticamente con la distancia a un punto fijo en el plano.

La relación con las trayectorias de bicicleta es la siguiente. Resulta que en casi todas las trayectorias ambiguas de bicicletas que conocemos (figura 9), la trayectoria de la rueda delantera es una curva elástica presurizada (las excepciones son las curvas delanteras que corresponden al problema de flotación de Ulam con densidad relativa ½, que al parecer forman una clase de curvas muy distintas).

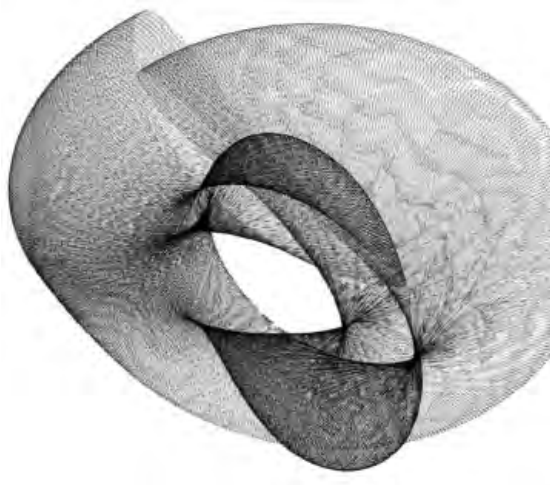
(*9*)



La relación entre los dos temas es actualmente un área activa de investigación (el sitio en la red de donde tomamos el artículo de F. Wegner aborda la relación entre las curvas elásticas y las trayectorias ambiguas con ejemplos y animaciones interesantes).

La tractriz

Hay otras propiedades llamativas de las trayectorias de bicicletas, algunas clásicas, otras más recientes. El ejemplo más básico (no trivial) de trayectorias de bicicleta es cuando la trayectoria de la rueda delantera (Γ) es una línea recta (figura 10). Notemos que si la bicicleta no está inicialmente alineada con Γ y corremos la rueda delantera hacia la izquierda sobre la recta Γ,

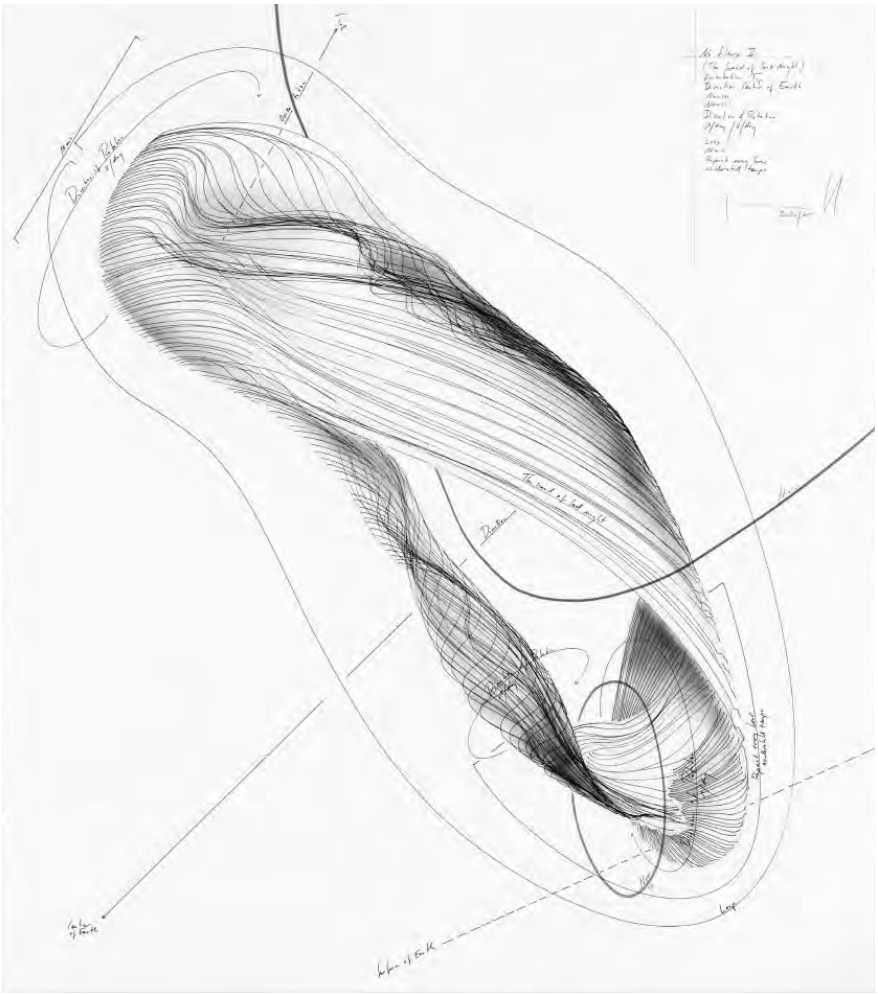


en algún momento la bicicleta se vuelve perpendicular a la Γ y se forma un "pico" en la línea γ. La trayectoria de la rueda trasera completa γ, la cual resulta infinita hacia la derecha y la izquierda; es una curva clásica llamada tractriz.

(*10*)

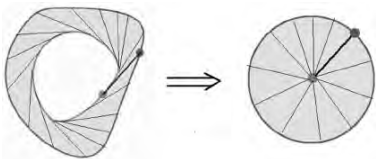
Ahora, ¿cuál es el área debajo de la tractriz? Sabemos la respuesta, (es $\pi L^{2/2}$) pero una demostración sin cálculo se obtiene al dividir el área en triángulos infinitesimales y luego trasladarlos para volver a formar un semidisco de radio L.

(*11*)



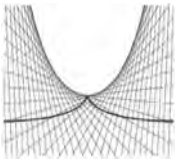
Este mismo argumento se puede usar para demostrar una propiedad que comparten todas las trayectorias cerradas de bicicletas: el área que queda entre las dos trayectorias es πL^2.

(12)

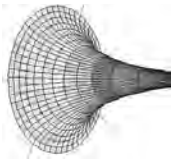


La tractriz es una curva con unas propiedades extraordinarias. Fue estudiada en los siglos XVII-XVIII, la "época de oro" del cálculo infinitesimal e integral, principalmente por Newton, Leibniz, Huygens y Euler. Veamos dos de sus propiedades: 1) la evoluta de la tractriz (la envolvente de sus rectas normales) es la catenaria, otra curva clásica famosa (figura 13); y 2) la superficie de revolución generada por la tractriz es la "pseudoesfera", esto es, una superficie de curvatura constante negativa cuyo nombre se debe a que la esfera ordinaria tiene curvatura constante positiva (figura 14).

(13)



(14)



Monodromía, planímetros y una conjetura

Si la rueda delantera atraviesa una trayectoria cerrada Γ, generalmente la bicicleta no regresa a su orientación inicial, por lo que la trayectoria trasera no se cierra. La relación entre la orientación inicial y final de la bicicleta se llama monodromía de Γ, y depende de la longitud de la bicicleta (L). Para cualquier Γ y L, la monodromía es una transformada de Möbius, de la cual existen dos tipos genéricos: las hiperbólicas y las elípticas. Las transformadas hiperbólicas son las que tienen dos puntos fijos; un punto fijo de la monodromía significa una trayectoria trasera cerrada como las que ocurren cuando la L es pequeña comparada con Γ (lo que suele suceder en una bicicleta verdadera). Las transformadas elípticas se parecen a rotaciones (sin puntos fijos) y ocurren cuando la bicicleta es suficientemente grande (como veremos más adelante).

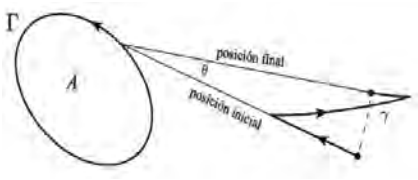
Ésta es la base teórica del planímetro de hacha —un simple instrumento de medición de área de figuras inventado a finales del siglo XIX por Holger Prytz, oficial danés de caballería, y que consiste en una barra metálica con una punta en un extremo y una cuchilla paralela a la barra por el otro (figura 15); como el perfil de la cuchilla es usualmente curvo se le llama "planímetro de hacha". Se utiliza guiando la punta a lo largo del perímetro Γ de la figura cuya área queremos medir, cuidando de no imponer ningún esfuerzo de tor-

sión a la barra; como consecuencia, la cuchilla se desliza a lo largo de una curva γ, siempre tangente a la barra. Dado que el planímetro satisface la condición de no derrapar, al igual que en nuestro modelo de la bicicleta, la punta y la cuchilla desempeña el papel de la rueda delantera y la trasera, respectivamente.

(15)

Parece casi increíble que algo tan simple (hasta primitivo) como el planímetro de hacha sirva para medir áreas. Si la figura es pequeña comparada con la longitud L de la barra, la cuchilla sigue una curva γ en forma de zigzag, similar a la curva seguida por las ruedas de un coche al estacionarse en un espacio reducido (figura 16). Cuando la punta regresa a su posición inicial la barra del planímetro regresa a una orientación ligeramente distinta, formando un ángulo θ con su orientación original; el área de la figura está dada aproximadamente por la fórmula $A = \theta L^2$. La falta de exactitud de este aparato lo convierte matemáticamente en algo más interesante que otros muy populares en aquella época, la mayoría basados en el teorema de Stokes del cálculo integral.

(16)



Como hemos mencionado arriba, para una bicicleta pequeña en comparación con la curva de la rueda delantera Γ, la monodromía es hiperbólica, lo cual significa que admite dos puntos fijos, uno de ellos un atractor, lo que resulta en una trayectoria trasera cerrada "atractora". Según la conjetura de Menzin formulada en 1906 (la cual permaneció abierta más de cien años, hasta que fue demostrada finalmente en 2009), esto ocurre cuando $A > \pi L^2$.

Gil Bor
Centro de Investigación en Matemáticas A.C., Guanajuato.

Sergei Tabachnikov
Department of Mathematics, Penn State, University Park, Pennsylvania, Estados Unidos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Auerbach, H. 1938. "Sur un problème de M. Ulam concernant l'èquilibre des corps flottants", en *Studia Mathematica*, vol.7, pp.121-42.

Bor, Gil Mark Levi, R. Perline, Serge Tabachnikov. 2018. "Tire Tracks and Integrable Curve Evolution", en *International Mathematics Research Notices*, núm.9, pp.1-71.

Foote, Robert, Mark Levi, Serge Tabachnikov. 2013. "Tractrices, Bicycle Tire Tracks, Hatchet Planimeters, and a 100-year-old", en *The American Mathematical Monthly*, vol.120, núm.3, pp.199-216.

Konhauser, Joseph D.E, Dan Velleman, Stan Wagon. 1996. *Which way did the bicycle go? ... and other intriguing mathematical mysteries*, Dolciani Mathematical Expositions Series of the Mathematical Association of America, núm.18, pp. 253.

IMÁGENES

P. 16: Hilma af Klint, *El cisne*, 1915. P. 17: Jean Michel Basquiuat, *Now's the time*, 1985. P. 18. Gustav Klucis, *NOT. Printsipy*, 1925. P. 20. Jorinde Voight, *No silence V*, 2015.

THE GEOMETRY OF BICYCLE ROUTES

Palabras clave. Bicicleta, trayectorias, tractriz, planímetro, curva elástica, monodromía.
Key words. Bicycle, Routes, Tractrix, Planimetry, Elastic Curve, Monodromy.

Resumen. La bicicleta es un objeto fascinante desde muchos puntos de vista, tanto prácticos como teóricos. El artículo enfoca en algunas propiedades geométricas de las trayectorias de bicicleta: "trayectorias ambiguas", el problema de flotación de Ulam, curvas elásticas, la tractriz, monodromía, planímetros y la conjetura de Menzin.
Abstract. The bicycle is a fascinating object from many points of view, both practical as well as theoretical. This article focuses on certain geometric properties of bicycle tracks: "ambiguous trajectories," the Ulam floating body problem, elastic curves, tractrices, monodromy, planimetry and Menzin's conjecture.

Gil Bor se doctoró en 1991 en la Universidad de California en Berkeley, EUA. Desde 1994 es investigador en el Centro de Investigación en Matemáticas en Guanajuato. Su área principal de investigación es la geometría diferencial. Es el creador y promotor de varios programas de divulgación científica en México, entre ellos el Taller de Ciencia para Jóvenes.

Sergei Tabachnikov se doctoró en 1987 en la Universidad Estatal de Moscú (USSR). Se trasladó a los Estados Unidos en 1990, primero a la Universidad de Arkansas y actualmente en la Universidad Estatal de Pensilvania. Sus áreas principales de interés son los sistemas dinámicos y la geometría. Es co-editor en jefe de la revista Mathematical Intelligencer.

Recibido el 6 de junio de 2019; aceptado el 20 de agosto de 2019.